Regole di derivazione

- La derivata di una somma algebrica di funzioni è uguale alla somma delle derivate :

$$D(f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

- La derivata di una funzione moltiplicata per una costante è uguale alla costante moltiplicata per la derivata della funzione:

$$D(Kf(x)) = kD(f(x))$$

- La derivata di un prodotto di funzioni è dato:

$$D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- La derivata di un rapporto di funzioni è dato:

$$D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

Utilizziamo il <u>principio di induzione</u> per provare che derivata della funzione *f(x)*= *x*$^{\alpha}$ è

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \textbf{(1)}$$

Per α=1 *f(x)* = *x* , come già visto $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$

Supponiamo che la (1) è vera per α-1 ovvero che la derivata di

***f(x)*= *x*$^{\alpha-1}$**

è

$$f'(x) = (\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

proviamolo per α.

Possiamo scrivere:

$$D(x^{\alpha}) = D(x^{\alpha-1}x)$$

applicando la regola di derivazione di un prodotto si ha:

$$D(x^{\alpha-1}x) = (\alpha-2)x^{\alpha-2}x + x^{\alpha-1}1 = x^{\alpha-2}x\left[\alpha-2+1\right] = x^{\alpha-1}(\alpha-1)$$

Tabella delle derivate

f(x)	f '(x)
K (K $\in \mathbb{R}$)	0
x^α (a $\in \mathbb{R}$)	$\alpha\, x^{\alpha-1}$
a^x (a $\neq$ 0, a $\neq$ 1)	$a^x \cdot \ln a$
e^x	e^x
ln x	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$ (a $\neq$ 0, a $\neq$ 1)	$\frac{1}{x}\ln a$
sen x	cos x
cos x	-sen x
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$
arcsen x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arcos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$

y (funzione)	y' (derivata)
$k\,f(x)$	$k\,f'(x)$
$f(x) \pm g(x)$	$f'(x) \pm g'(x)$
$f(x) \cdot g(x)$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$	$\boldsymbol{f'(x)}g(x)h(x)+f(x)\boldsymbol{g'(x)}h(x)+f(x)g(x)\boldsymbol{h'(x)}$
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$[f(x)]^n$	$n[f(x)]^{n-1}f'(x)$
$[f(x)]^{g(x)}$	$[f(x)]^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot \ln[f(x)] + \dfrac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right]$
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$
$\sin f(x)$	$\cos f(x)\,f'(x)$
$\cos f(x)$	$-\sin f(x)\,f'(x)$
$tg\,f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$
$ctg\,f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}$
$\log_\alpha f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}\log_\alpha e$
$\ln f(x)$ *oppure* $\ln\lvert f(x)\rvert$	$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)} \cdot \log a \cdot f'(x)$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)} \cdot f'(x)$
$f^{-1}(x)$ ***	$\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
$\arcsin f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$\arccos f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$
$arctg\,f(x)$	$\dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$
$arcctg\,f(x)$	$-\dfrac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$

Informazioni utili

$y = e^{\log \sin x} = \log e^{\sin x} = \sin x$	$\dfrac{1}{y}y' = \log x + 1$

*** Per ricavare la funzione inversa, risolvere l'equazione y = f(x) in x. Il valore della x che si trova è la funzione inversa $f^{-1}(y)$